

Interrogation n°7 – Algèbre linéaire et DL

(sujet A) Corrigé

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ la fonction définie par $f(aX^2 + bX + c) = (2b - c)X^2 + (b - 2c)X$. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker } f &\iff (2b - c)X^2 + (b - 2c)X = 0 \\
 &\iff \begin{cases} 2b - c = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2b \\ -3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } f &= \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid b = c = 0 \right\} \\
 &= \left\{ aX^2 \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect}(X^2)
 \end{aligned}$$

La famille (X^2) engendre $\text{Ker } f$ et son unique vecteur est non nul, donc c'est une famille libre. Ainsi, c'est une base de $\text{Ker } f$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le DL₂(0) est :

$$f(x) = 1 + ax + (a + 2)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Quelle est l'équation de la tangente à f en 0? Est-ce que f admet un extremum local en 0? Discuter selon la valeur de a .

D'après le DL, l'équation de la tangente en 0 de f est $y = 1 + ax$.

- Si $a \neq 0$, alors $f'(0) = a \neq 0$. Si 0 était un extremum local, alors ce serait un point critique, ce qui est impossible. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en 0.
- Si $a = 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^2$, de sorte que f admet un minimum local en 0.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$. On a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

Or,

$$x \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} xx = x^2$$

et

$$\begin{aligned}
 \sin x - x &= x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) - x \\
 &= -\frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)
 \end{aligned}$$

donc

$$\sin x - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{6}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} = \boxed{0}$

Interrogation n°7 – Algèbre linéaire et DL

(sujet B) Corrigé

NOM : Prénom : Note :

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$. Montrer que $\dim F = 2$.

On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y + 3z\} \\ &= \{(-2y + 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1)) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$ engendre F et ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires : \mathcal{B} est donc une famille libre. C'est une base de F , de sorte que $\dim F = \text{card}(\mathcal{B}) = 2$.

2. Justifier que la fonction $\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ admet un $\text{DL}_7(0)$. En est-il de même de la fonction $\text{coth} : x \mapsto \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$?

La fonction th est de classe \mathcal{C}^7 sur \mathbb{R} par quotient de telles fonctions, donc par la formule de Taylor-Young, elle admet un $\text{DL}_7(0)$.

Ce n'est pas le cas pour la fonction coth car elle n'admet pas de limite finie en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \text{coth } x = \pm\infty$.

3. Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \frac{P(X) + P(-X)}{2}$. Montrer que f est un projecteur.

Montrons que $f \circ f = f$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$f(f(P)) = f(Q) \quad \text{avec } Q = \frac{P(X) + P(-X)}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} f(f(P)) &= \frac{Q(X) + Q(-X)}{2} \\ &= \frac{\frac{P(X) + P(-X)}{2} + \frac{P(-X) + P(X)}{2}}{2} \\ &= \frac{P(X) + P(-X)}{2} = f(P) \end{aligned}$$

donc $f \circ f = f$. De plus, montrons que f est linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= \frac{(\alpha P + \beta Q)(X) + (\alpha P + \beta Q)(-X)}{2} \\ &= \alpha \frac{P(X) + P(-X)}{2} + \beta \frac{Q(X) + Q(-X)}{2} \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien un projecteur.